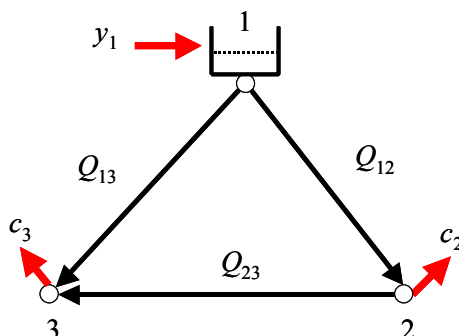


Έστω το στοιχειώδες δίκτυο του σχήματος, που αποτελείται από μια δεξαμενή που τροφοδοτεί δύο κόμβους. Ζητείται η κατάστρωση των εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου του δικτύου και η περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης, με τη μέθοδο γραμμικοποίησης των Η-εξισώσεων.



### Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Με βάση τις (αυθαίρετες) φορές που σημειώνονται στο σχήμα, οι εξισώσεις συνέχειας των τριών κόμβων του δικτύου διατυπώνονται ως:

$$\text{Κόμβος 1:} \quad -Q_{12} - Q_{13} = -y_1 \quad (1)$$

$$\text{Κόμβος 2:} \quad Q_{12} - Q_{23} = c_2 \quad (2)$$

$$\text{Κόμβος 3:} \quad Q_{13} + Q_{23} = c_3 \quad (3)$$

Το σύνολο της προσφοράς νερού οφείλει να είναι ίσο με το σύνολο της ζήτησης, συνεπώς:

$$c_2 + c_3 = y_1 \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (1), προκύπτει:

$$Q_{12} + Q_{13} = c_2 + c_3 \quad (5)$$

Αθροίζοντας τις (2) και (3) λαμβάνεται η εξίσωση συνέχειας του κόμβου 1. Κατά συνέπεια, από τις τρεις εξισώσεις συνέχειας, μόνο οι δύο είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Υπενθυμίζεται ότι σε ένα μοντέλο δικτύου αποτελούμενο από  $n$  κόμβους,  $n_0$  σημεία γνωστού ενεργειακού υψομέτρου (δεξαμενές),  $m$  κλάδους και  $r$  βρόχους, ισχύει η θεμελιώδης σχέση  $m = n + r - n_0$ , και μπορούν να γραφούν  $n - n_0$  γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις συνέχειας.

Η τρίτη αναγκαία γραμμικά ανεξάρτητη εξίσωση προκύπτει με θεώρηση της αρχής διατήρησης της ενέργειας κατά μήκος του βρόχου. Η εν λόγω σχέση γράφεται:

$$\Delta h_{12} + \Delta h_{23} + \Delta h_{31} = 0 \quad (6)$$

ή, ισοδύναμα:

$$\kappa_{12} Q_{12}^\lambda + \kappa_{23} Q_{23}^\lambda - \kappa_{13} Q_{13}^\lambda = 0 \quad (7)$$

Η παραπάνω έκφραση προκύπτει με βάση τη γενική σχέση γραμμικών ενεργειακών απωλειών:

$$\Delta h_{ij} = \kappa_{ij} Q_{ij}^\lambda \quad (8)$$

Η εξίσωση (8) είναι μη γραμμική ως προς την παροχή  $Q_{ij}$ . Υπενθυμίζεται ότι ο όρος  $\kappa_{ij}$  είναι σταθερός, εφόσον χρησιμοποιείται η προσεγγιστική σχέση Hazen-Williams για τον υπολογισμό των ενεργειακών απωλειών, αλλά εξαρτώμενη από την παροχή, εφόσον χρησιμοποιείται η ακριβέστερη σχέση Darcy-Weisbach, με εκτίμηση του συντελεστή τριβών κατά Colebrook-White.

Οι (2), (3) και (7) ορίζουν ένα μη γραμμικό σύστημα τριών ανεξάρτητων εξισώσεων, με ισάριθμους αγνώστους (παροχές κλάδων).

### Επίλυση με την μέθοδο γραμμικοποίησης των Η-εξισώσεων

Η επίλυση του προβλήματος γίνεται με την επαναληπτική μέθοδο της γραμμικοποίησης των Η-εξισώσεων. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, θεωρούνται αυθαίρετες αρχικές τιμές ενεργειακών υψομέτρων στους κόμβους, και διορθώνονται, σε κάθε κύκλο, οι εξισώσεις συνέχειας.

Έστω οι αρχικές τιμές των ενεργειακών υψομέτρων  $h_2^{(0)}$  και  $h_3^{(0)}$ , στους κόμβους 2 και 3, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε να ισχύουν οι φορές των παροχών που φαίνονται στο σχήμα. Το ενεργειακό υψόμετρο του κόμβου 1 είναι γνωστό, καθώς ταυτίζεται με τη στάθμη της δεξαμενής (η εν λόγω στάθμη είναι η ελάχιστη, εφόσον σκοπός της επίλυσης είναι ο έλεγχος των ελάχιστων πιέσεων). Το εν λόγω υψόμετρο συμβολίζεται με  $h_1^*$ .

Επιλύοντας τη γενική σχέση ενεργειακών απωλειών (8) ως προς την παροχή κάθε κλάδου ( $i, j$ ) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση:

$$\Delta h_{ij} = \kappa_{ij} Q_{ij}^\lambda = \kappa_{ij} |Q_{ij}^{\lambda-1}| Q_{ij} \Rightarrow Q_{ij} = \frac{1}{\kappa_{ij} |Q_{ij}^{\lambda-1}|} \Delta h_{ij} \Rightarrow Q_{ij} = r_{ij} \Delta h_{ij} \quad (9)$$

όπου:

$$r_{ij} = \frac{1}{\kappa_{ij} |Q_{ij}^{\lambda-1}|} \quad (9)$$

Η ποσότητα  $r_{ij}$  καλείται γραμμικοποιημένη αντίσταση, και είναι πάντα θετική. Θεωρώντας γνωστό το ενεργειακό υψόμετρο  $h_i^{(0)}$  κάθε κόμβου  $i$ , υπολογίζεται η πτώση πίεσης  $\Delta h_{ij}^{(0)}$  μεταξύ κάθε ζεύγους διαδοχικών κόμβων, ακολούθως επιλύεται το 2ο θεμελιώδες πρόβλημα της υδραυλικής και εκτιμώνται οι αρχικές παροχές  $Q_{ij}^{(0)}$  των κλάδων. Οι εν λόγω παροχές εισάγονται στη σχέση (9), οπότε προκύπτουν οι αρχικές εκτιμήσεις των γραμμικοποιημένων αντιστάσεων,  $r_{ij}^{(0)}$ . Επισημαίνεται ότι κατά τη διάρκεια ενός επαναληπτικού βήματος, οι τιμές των  $r_{ij}$  θεωρούνται γνωστές, παρόλο που, στην πραγματικότητα, είναι, όπως και οι παροχές, συνάρτηση των ενεργειακών υψομέτρων.

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, η εξίσωση συνέχειας του κόμβου 1 αναδιατυπώνονται ως εξής (παραλείπεται ο δείκτης του επαναληπτικού βήματος):

$$\begin{aligned} -r_{12} \Delta h_{12} - r_{13} \Delta h_{13} &= -y_1 \Rightarrow \\ -r_{12} (h_1 - h_2) - r_{13} (h_1 - h_3) &= -y_1 \Rightarrow \\ -(r_{12} + r_{13}) h_1 + r_{12} h_2 + r_{13} h_3 &= -y_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Ομοίως, οι εξισώσεις συνέχειας των κόμβων 2 και 3 διατυπώνονται, αντίστοιχα, ως:

Κόμβος 2:

$$\begin{aligned} r_{12} \Delta h_{12} - r_{23} \Delta h_{23} &= c_2 \Rightarrow \\ r_{12} (h_1 - h_2) - r_{23} (h_2 - h_3) &= c_2 \Rightarrow \\ r_{12} h_1 - (r_{12} + r_{23}) h_2 + r_{23} h_3 &= c_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Κόμβος 3:

$$\begin{aligned}
 r_{13} \Delta h_{13} + r_{23} \Delta h_{23} &= c_3 \Rightarrow \\
 r_{13} (h_1 - h_3) + r_{23} (h_2 - h_3) &= c_3 \Rightarrow \\
 r_{13} h_1 + r_{23} h_2 - (r_{13} + r_{23}) h_3 &= c_3
 \end{aligned} \tag{12}$$

Προκύπτει λοιπόν ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned}
 b_{11} h_1 + b_{12} h_2 + b_{13} h_3 &= -y_1 \\
 b_{21} h_1 + b_{22} h_2 + b_{23} h_3 &= c_2 \\
 b_{31} h_1 + b_{32} h_2 + b_{33} h_3 &= c_3
 \end{aligned} \tag{13}$$

που, ισοδύναμα, γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

όπου οι διαγώνιοι όροι  $b_{ii}$  είναι πάντα αρνητικοί, και περιέχουν αθροίσματα γραμμικοποιημένων αντιστάσεων, ενώ οι μη διαγώνιοι όροι  $b_{ij}$  ταυτίζονται με τις γραμμικοποιημένες αντιστάσεις  $r_{ij}$  των αντίστοιχων κλάδων  $(i, j)$ , ήτοι:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\sum_{j \neq i}^n a_{ij} r_{ij} & \text{αν } i = j \text{ (διαγώνια στοιχεία)} \\ a_{ij} r_{ij} & \text{αν } i \neq j \text{ (μη διαγώνια στοιχεία)} \end{cases} \tag{15}$$

όπου  $a_{ij} = 1$ , εφόσον υπάρχει σύνδεση (κλάδος) μεταξύ των κόμβων  $i$  και  $j$ , και  $a_{ij} = 0$  διαφορετικά.

Εφόσον οι αρχική υπόθεση για τα ενεργειακά υψόμετρα ήταν ορθή, τότε η επίλυση των εξισώσεων συνέχειας θα έπρεπε να δίνει τις πραγματικές παροχές εξόδου,  $c_2$  και  $c_3$ . Επειδή κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, οι εκτιμώμενες παροχές εξόδου διαφέρουν από τις πραγματικές, με συνέπεια να προκύπτει σφάλμα τόσο όσον αφορά τις παροχές κάθε επιμέρους κόμβου, όσο και τη συνολική παροχή του δικτύου. Συγκεκριμένα:

$$\begin{bmatrix} b_{11}^{(0)} & b_{12}^{(0)} & b_{13}^{(0)} \\ b_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} & b_{23}^{(0)} \\ b_{31}^{(0)} & b_{32}^{(0)} & b_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^* \\ h_2^{(0)} \\ h_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \\ c_3^{(0)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -y_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

ή σε μορφή μητρώων:

$$\mathbf{B}^{(0)} \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{c}^{(0)} - \mathbf{y}^{(0)} \tag{17}$$

Η παραπάνω διαδικασία γίνεται αποκλειστικά για την εκτίμηση του σφάλματος των παροχών εξόδου στους κόμβους,  $\Delta c_i^{(0)} = |c_i^{(0)} - c_i|$ , καθώς και της αθροιστικής παροχής του δικτύου,  $q$ , ήτοι:

$$\varepsilon_q^{(0)} = \left| \sum_{j=i}^n c_j^{(0)} - q \right| \tag{18}$$

Η διόρθωση των αρχικών τιμών των ενεργειακών υψομέτρων,  $h_i^{(0)}$ , επιτυγχάνεται με επίλυση του συστήματος (14). Όπως ωστόσο έχει προαναφερθεί, οι εξισώσεις συνέχειας των κόμβων δεν είναι όλες γραμμικά ανεξάρτητες. Θεωρούμε δύο από αυτές, εξαιρώντας την εξίσωση συνέχειας του κόμβου της δεξαμενής, η τιμή του ενεργειακού υψομέτρου της οποίας είναι γνωστή και ίση με  $h_1^*$ . Απαλείφοντας την πρώτη εξίσωση και διαχωρίζοντας τους γνωστούς από τους αγνώστους (όπου ως

άγνωστοι θεωρούνται πλέον τα ενεργειακά υψόμετρα των κόμβων 2 και 3), προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} b_{22}^{(0)} & b_{23}^{(0)} \\ b_{32}^{(0)} & b_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{21}^{(0)} \\ b_{31}^{(0)} \end{bmatrix} h_1^* \quad (19)$$

ή σε μορφή μητρώων:

$$\mathbf{B}' \mathbf{h}' = \mathbf{c} - \mathbf{B}^* \mathbf{h}^* \quad (20)$$

Από την επίλυση του συστήματος, η οποία γίνεται, ως επί το πλείστον, με αριθμητικές μεθόδους, προκύπτει η νέα εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων, ήτοι:

$$\begin{bmatrix} h_2^{(1)} \\ h_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{22}^{(0)} & b_{23}^{(0)} \\ b_{32}^{(0)} & b_{33}^{(0)} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{21}^{(0)} \\ b_{31}^{(0)} \end{bmatrix} h_1^* \right) \quad (21)$$

Τα νέα ενεργειακά υψόμετρα διαφέρουν από τα αρχικά, οπότε προκύπτει ένας επιπλέον τύπος σφάλματος σύγκλισης, το οποίο μειώνεται σε κάθε επανάληψη.

Με την επίλυση του συστήματος και τον υπολογισμό των τριών τύπων σφαλμάτων, ολοκληρώνεται ο πρώτος κύκλος (μηδενική επανάληψη). Στον επόμενο κύκλο, επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία, με τη διαφορά ότι η νέα εκτίμηση των παροχών των κλάδων  $Q_{ij}^{(1)}$  προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των ενδιάμεσων τιμών  $Q_{ij}^*$  που υπολογίζονται με βάση τα νέα ενεργειακά υψόμετρα  $h_i^{(1)}$  και των τιμών του αμέσως προηγούμενου κύκλου,  $Q_{ij}^{(0)}$ . Συγκεκριμένα:

$$Q_{ij}^{(1)} = \varphi Q_{ij}^* + (1 - \varphi) Q_{ij}^{(0)} \quad (22)$$

όπου  $\varphi = 0.60$  (τυπική τιμή, που εξασφαλίζει ταχεία και ευσταθή σύγκλιση).

Έστω ότι στην αρχή του επαναληπτικού κύκλου  $k$  είναι διαθέσιμη μια εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων,  $h_i^{(k)}$ . Η υπολογιστική διαδικασία συνοψίζεται ως εξής:

**Βήμα 1:** Υπολογισμός γραμμικών ενεργειακών απωλειών,  $\Delta h_{ij}^{(k)}$ , κατά μήκος των κλάδων, και εκτίμηση ενδιάμεσων και τελικών παροχών,  $Q_{ij}^{(k)}$ .

**Βήμα 2:** Υπολογισμός γραμμικοποιημένων αντιστάσεων,  $r_{ij}^{(k)}$ , και διαμόρφωση μητρώου  $\mathbf{B}^{(k)}$ .

**Βήμα 3:** Εκτίμηση σφαλμάτων παροχής εξόδου στους κόμβους  $\varepsilon_c^{(k)} = \max \{\Delta c_i^{(k)}\}$  και συνολικής παροχής δικτύου  $\varepsilon_q^{(k)}$ , με πολλαπλασιασμό των μητρώων  $\mathbf{B}^{(k)}$  και  $\mathbf{h}^{(k)}$ .

**Βήμα 4:** Αντιστροφή μητρώου  $\mathbf{B}^{(k)}$ , και επίλυση του συστήματος (20) για την εκτίμηση των νέων ενεργειακών υψομέτρων,  $\mathbf{h}^{(k+1)}$ .

**Βήμα 5:** Εκτίμηση σφάλματος ενεργειακών υψομέτρων,  $\varepsilon_h^{(k)} = \max \{|h_i^{(k-1)} - h_i^{(k)}|\}$ .

**Βήμα 6:** Αν δεν ικανοποιούνται και τα τρία κριτήρια σύγκλισης, ήτοι  $\varepsilon_c^{(k)} < 0.01$  L/s,  $\varepsilon_q^{(k)} < 0.01$  L/s και  $\varepsilon_h^{(k)} < 0.01$  m, η διαδικασία επαναλαμβάνεται, με αύξηση του μετρητή  $k$  και μετάβαση στο βήμα 1.

### Αριθμητικό παράδειγμα

Έστω  $h_1^* = 50$  m,  $c_2 = 5$  L/s,  $c_3 = 10$  L/s,  $L_{12} = L_{13} = 100$  m,  $L_{23} = 150$  m,  $D_{12} = D_{23} = 81.4$  mm,  $D_{13} = 99.4$  mm,  $k_s = 1.0$  mm (κοινό για όλους τους κλάδους).

Υποθέτουμε αρχικά ενεργειακά υψόμετρα  $h_2^{(0)} = 49.000$  m, και  $h_3^{(0)} = 48.000$  m. Οι αντίστοιχες γραμμικές απώλειες στους κλάδους είναι:

$$\Delta h_{12}^{(0)} = 1.000 \text{ m}, \Delta h_{23}^{(0)} = 1.000 \text{ m}, \Delta h_{23}^{(0)} = 2.000 \text{ m}$$

Από τη σχέση Darcy-Weisbach, και με εκτίμηση του συντελεστή γραμμικών απωλειών κατά Colebrook-White, προκύπτει μια αρχική εκτίμηση των παροχών στους κλάδους ίση με:

$$Q_{12}^{(0)} = 3.213 \text{ L/s}, Q_{23}^{(0)} = 2.615 \text{ L/s}, Q_{23}^{(0)} = 7.790 \text{ L/s}$$

Οι αντίστοιχες γραμμικοποιημένες αντιστάσεις είναι:

$$r_{12}^{(0)} = 3.213 \text{ L/s/m}, r_{23}^{(0)} = 2.615 \text{ L/s/m}, r_{23}^{(0)} = 3.895 \text{ L/s/m}$$

Με βάση τις τιμές των  $r_{ij}^{(0)}$ , υπολογίζονται τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{B}^{(0)}$ . Η μητρική διατύπωση των εξισώσεων συνέχειας των κόμβων, ήτοι η σχέση (16), γράφεται:

$$\begin{bmatrix} -7.108 & 3.213 & 3.895 \\ 3.213 & -5.828 & 2.615 \\ 3.895 & 2.615 & -6.510 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50.000 \\ 49.000 \\ 48.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.003 \\ 0.598 \\ 10.406 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -15.000 \\ 5.000 \\ 10.000 \end{bmatrix}$$

Από την επίλυση των εξισώσεων συνέχειας προκύπτει ότι η παροχή εξόδου στον κόμβο 2 είναι 0.598 L/s, έναντι του ορθού 5.000 L/s, ενώ η παροχή εξόδου στον κόμβο 3 είναι 10.406 L/s, έναντι του ορθού 10.000 L/s. Η συνολική κατανάλωση του δικτύου είναι 11.003 L/s, έναντι του ορθού 15.000 L/s. Συνεπώς, τα αντίστοιχα σφάλματα είναι  $\varepsilon_c^{(0)} = 4.402 \text{ L/s}$  (απόλυτο μέγιστο σφάλμα παροχής εξόδου κόμβων) και  $\varepsilon_q^{(0)} = 3.397 \text{ L/s}$  (απόλυτο σφάλμα συνολικής παροχής δικτύου).

Θεωρώντας άγνωστα τα ενεργειακά υψόμετρα στους κόμβους 2 και 3, οι εξισώσεις συνέχειας αναδιατυπώνονται ως (σχέση 19):

$$\begin{bmatrix} -5.828 & 2.615 \\ 2.615 & -6.510 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.000 \\ 10.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.213 \\ 3.895 \end{bmatrix} 50.000$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος, προκύπτουν οι νέες εκτιμήσεις των ενεργειακών υψομέτρων,  $h_2^{(1)} = 48.113 \text{ m}$  και  $h_3^{(1)} = 47.706 \text{ m}$ , αντί των  $h_2^{(0)} = 49.000 \text{ m}$  και  $h_3^{(0)} = 48.000 \text{ m}$  που είχαν υποτεθεί αρχικά. Συνεπώς, το σφάλμα σύγκλισης είναι  $\varepsilon_h^{(0)} = 0.887 \text{ m}$ .

Στον επόμενο επαναληπτικό κύκλο, οι νέες τιμές των γραμμικών απωλειών στους κλάδους είναι:

$$\Delta h_{12}^{(1)} = 1.887 \text{ m}, \Delta h_{23}^{(1)} = 0.407 \text{ m}, \Delta h_{23}^{(1)} = 2.294 \text{ m}$$

Από τη σχέση Darcy-Weisbach, και με εκτίμηση του συντελεστή γραμμικών απωλειών κατά Colebrook-White, προκύπτει μια ενδιάμεση εκτίμηση των παροχών στους κλάδους ίση με:

$$Q_{12}^* = 4.431 \text{ L/s}, Q_{23}^* = 1.653 \text{ L/s}, Q_{23}^* = 8.348 \text{ L/s}$$

Οι παραπάνω τιμές δεν χρησιμοποιούνται απευθείας για την εκτίμηση των γραμμικοποιημένων αντιστάσεων. Αντίθετα, χρησιμοποιείται ένα σταθμισμένο άθροισμα των ενδιάμεσων και των προηγούμενων τιμών παροχής, σύμφωνα με τη σχέση (22). Κατά συνέπεια, οι τελικές εκτιμήσεις των παροχών για τον συγκεκριμένο κύκλο είναι:

$$Q_{12}^{(1)} = 3.943 \text{ L/s}, Q_{23}^{(1)} = 2.038 \text{ L/s}, Q_{23}^{(1)} = 8.125 \text{ L/s}$$

Οι αντίστοιχες γραμμικοποιημένες αντιστάσεις είναι:

$$r_{12}^{(1)} = 2.089 \text{ L/s/m}, r_{23}^{(1)} = 5.009 \text{ L/s/m}, r_{23}^{(1)} = 3.542 \text{ L/s/m}$$

Με βάση τις τιμές των  $r_{ij}^{(1)}$ , υπολογίζονται τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{B}^{(1)}$ . Η μητρική διατύπωση των εξισώσεων συνέχειας των κόμβων, ήτοι η σχέση (16), γράφεται:

$$\begin{bmatrix} -5.631 & 2.089 & 3.542 \\ 2.089 & -7.099 & 5.009 \\ 3.542 & 5.009 & -8.551 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50.000 \\ 48.113 \\ 47.706 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.069 \\ 1.906 \\ 10.163 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -15.000 \\ 5.000 \\ 10.000 \end{bmatrix}$$

Από την επίλυση προκύπτει ότι η παροχή εξόδου στον κόμβο 2 είναι 1.906 L/s, έναντι του ορθού 5.000 L/s, ενώ η παροχή εξόδου στον κόμβο 3 είναι 10.163 L/s, έναντι του ορθού 10.000 L/s. Η συνολική κατανάλωση του δικτύου είναι 12.069 L/s, έναντι του ορθού 15.000 L/s. Συνεπώς, τα αντίστοιχα σφάλματα είναι  $\varepsilon_c^{(1)} = 3.094$  L/s και  $\varepsilon_q^{(1)} = 2.931$  L/s. Παρατηρείται ότι και οι δύο όροι σφάλματος είναι μικρότεροι από τους αντίστοιχους του προηγούμενου επαναληπτικού βήματος.

Θεωρώντας άγνωστα τα ενεργειακά υψόμετρα στους κόμβους 2 και 3, οι εξισώσεις συνέχειας αναδιατυπώνονται ως (σχέση 19):

$$\begin{bmatrix} -7.099 & 5.009 \\ 5.009 & -8.551 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.000 \\ 10.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.089 \\ 3.542 \end{bmatrix} 50.000$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος, προκύπτουν οι νέες εκτιμήσεις των ενεργειακών υψομέτρων,  $h_2^{(2)} = 47.393$  m και  $h_3^{(2)} = 47.303$  m, αντί των  $h_2^{(1)} = 48.113$  m και  $h_3^{(1)} = 47.706$  m, που είναι οι εκτιμήσεις του προηγούμενου βήματος. Συνεπώς, το τρέχον σφάλμα σύγκλισης είναι  $\varepsilon_h^{(1)} = 0.720$  m, τιμή επίσης μικρότερη από την αντίστοιχη του προηγούμενου βήματος.

Έπειτα από 11 επαναλήψεις, όλα τα σφάλματα έχουν γίνει μικρότερα από τις μέγιστες επιτρεπόμενες τιμές, ήτοι 0.01 L/s για τις παροχές και 0.01 m για τα ενεργειακά υψόμετρα, και η διαδικασία επίλυσης θεωρείται ότι έχει συγκλίνει. Οι τελικές εκτιμήσεις των ενεργειακών υψομέτρων είναι  $h_2^{(11)} = 47.088$  m και  $h_3^{(11)} = 47.044$  m, ενώ οι παροχές των κλάδων είναι:

$$Q_{12}^{(11)} = 5.515 \text{ L/s}, Q_{23}^{(11)} = 0.515 \text{ L/s}, Q_{23}^{(11)} = 9.485 \text{ L/s}$$

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η πορεία σύγκλισης, όσον αφορά τις τιμές των ενεργειακών υψομέτρων στους δύο κόμβους (δεξιά) και τους τρεις τύπους σφαλμάτων (αριστερά). Παρατηρείται ότι στις τρεις πρώτες δοκιμές η μείωση των σφαλμάτων είναι ραγδαία, ενώ οι τιμές των υψομέτρων σταθεροποιούνται, ουσιαστικά, μετά την έβδομη δοκιμή.

